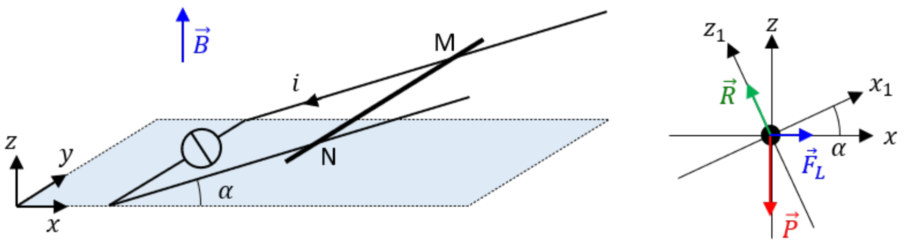
Correction TD - I2

Exercices à maîtriser

Ex. n°1 • Rails de Laplace en pente ★★☆ 0207

1) Schéma, vue en 3D et de profil :



2) Bilan des forces dans la base (x_1, z_1) : poids, réaction normale du support et force de Laplace.

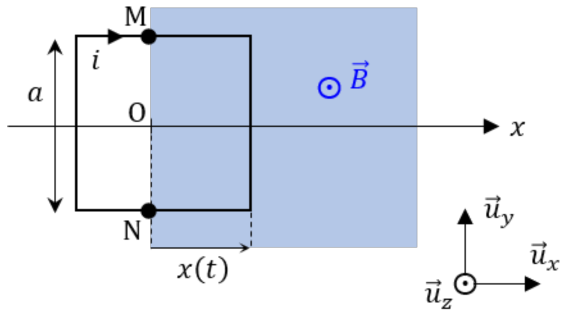
$$\begin{aligned}
\vec{P} &= mg\Big(-\cos(\alpha)\,\vec{u}_{z_1} - \sin(\alpha)\,\vec{u}_{x_1}\Big)\\
\vec{R} &= R\,\vec{u}_{z_1}\\
\vec{F}_L &= i\,\overrightarrow{\mathrm{NM}} \wedge \vec{B} = iaB\,\vec{u}_x = iaB\Big(\cos(\alpha)\,\vec{u}_{x_1} - \sin(\alpha)\,\vec{u}_{z_1}\Big)
\end{aligned}$$

On applique le PFD à l'équilibre (on ne s'intéresse qu'à la projection selon $\vec{u}_{x_1}$) :

$$0 = -mg\,\sin(\alpha) + iaB\,\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{mg}{aB}\,\tan(\alpha) = 6{,}0\ \mathrm{A}}$$

Ex. n°2 • Freinage d'un mobile en translation ★★☆ 8036

1) Il faut choisir un sens d'orientation de la spire. On choisit le sens horaire.



Par définition :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\vec{B}\cdot\vec{S}}{dt} = \frac{dBS}{dt} = \frac{dBax}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = Ri = Bav}$$

Avec S la surface de la spire dans le champ magnétique.

2) Seule la partie de la spire dans le champ magnétique subit une force de Laplace. Ainsi,

$$\vec{F}_L = i\,\overrightarrow{\mathrm{MN}} \wedge \vec{B} = \boxed{-iaB\,\vec{u}_x}$$

On applique le PFD ur la spire dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

$$\boxed{m\dot{v} = -iaB}$$

3) On en déduit :

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{mR}{(Ba)^2}$$

Ainsi, avec les CI :

$$\boxed{v(t) = v_0\,e^{-t/\tau}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \tau v_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

4) On a :

$$a = \tau v_0\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) \quad \Rightarrow \quad e^{-t_1/\tau} = 1 - \frac{a}{\tau v_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = -\tau\,\ln\!\left(1 - \frac{a}{\tau v_0}\right)}$$

5) Lorsque la spire devient entièrement immergée, la vitesse vaut :

$$v_1 = v_0\,e^{-t_1/\tau} = v_0 - \frac{a}{\tau}$$

La spire garde une vitesse constante tant qu'elle est entièrement immergée (résultante des forces de Laplace nulle).

6) L'énergie dissipée par effet Joule durant la phase d'entrée vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{Joule}} = \int_0^{t_1} Ri^2 \, dt = \frac{(Ba)^2}{R} \int_0^{t_1} v^2 \, dt = \frac{(Bav_0)^2}{R} \int_0^{t_1} e^{-2t/\tau} \, dt$$

Ainsi,

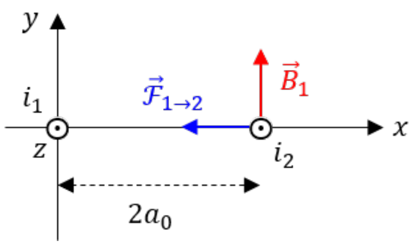
$$\mathcal{E}_{\text{Joule}} = -\frac{\tau}{2} \frac{(Bav_0)^2}{R} \left(e^{-2t_1/\tau} - 1 \right) = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - v_1^2 \right)$$

Il s'agit de la perte d'énergie cinétique.

Ex. n°3 • Forces de Laplace entre deux fils parallèles ★⯪☆ 2131

1) Le champ tourbillonne autour du fil dans le sens de la main droite.

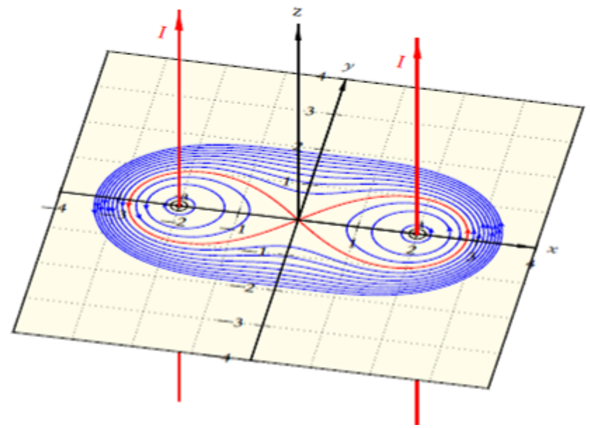
2) On place un fil au centre d'un repère avec un courant orienté selon l'axe (Oz). Orientons le courant de l'autre fil dans le même sens et déterminons le sens de la force.



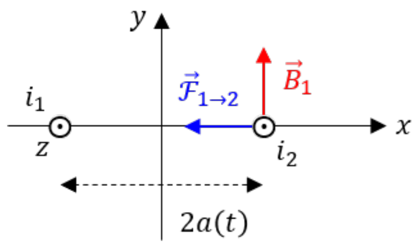
La force linéique de Laplace vaut :

$$\vec{\mathcal{F}}_{1\to2} = i_2 \; \vec{u}_2 \wedge \vec{B}_1 = -i_2 B_1 \; \vec{u}_{1\to2}$$

La force est attractive.



3) On place un repère centré par rapport aux deux fils. La référentiel associé à ce repère est galiléen puisque le centre de masse des deux fils est immobile. On repère par $x(t) = a(t)$ la position du fil de droite.



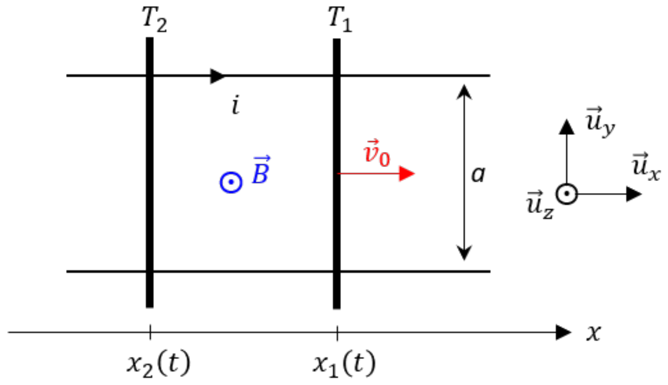
On applique le PFD (version linéique) sur le fil de droite qui ne subit que la force de Laplace du fil de gauche.

$$\boxed{\lambda \; \ddot{a} = -\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a}}$$

Ex. n°4 • Rails de Laplace avec deux tiges ★★☆ 1559

1) La tige T_1 part vers la droite. Cela augmente le flux ϕ à travers le circuit. Un courant dans le sens horaire apparaît pour compenser cette augmentation de flux. Le courant provoque l'apparition d'une force de Laplace sur chaque tige : dirigée selon $-\vec{u}_x$ pour T_1 et selon $+\vec{u}_x$ pour T_2. Ainsi, T_1 ralenti et T_2 accélère. Le système atteint l'équilibre lorsque les vitesses de chaque tige sont égales (flux constant même si les tiges sont en mouvement).

2) On oriente le courant dans le sens horaire.



Le flux à travers le circuit vaut :

$$\phi = -Ba\,(x_1 - x_2)$$

Loi de Faraday et loi des mailles :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \boxed{Ba\,(v_1 - v_2) = 2Ri}$$

3) Force de Laplace de chaque tige :

$$\overrightarrow{F}_{L1} = -ia\ \overrightarrow{u}_y \wedge B\ \overrightarrow{u}_z = -iaB\ \overrightarrow{u}_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}_{L2} = ia\ \overrightarrow{u}_y \wedge B\ \overrightarrow{u}_z = iaB\ \overrightarrow{u}_x$$

Ainsi les PFD donnent :

$$m\dot{v}_1 = -iaB \quad \text{et} \quad m\dot{v}_2 = iaB$$

4) On somme les PFD :

$$m \cdot \frac{d}{dt}\Big(v_1 + v_2\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 + v_2 = cte = v_0}$$

5) On en déduit le courant i en fonction de v_1 uniquement :

$$i = \frac{Ba}{2R}\,(2v_1 - v_0)$$

que l'on injecte dans le PFD de T_1 :

$$m\dot{v}_1 = -\frac{(Ba)^2}{2R}\,(2v_1 - v_0) \quad \Rightarrow \quad \dot{v}_1 + \underbrace{\frac{(Ba)^2}{mR}}_{=\ 1/\tau} v_1 = \frac{(Ba)^2}{2mR} v_0$$

On en déduit :

$$\boxed{v_1(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 + e^{-t/\tau}\right) \quad \text{et} \quad v_2(t) = \frac{v_0}{2}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

6) L'énergie dissipée par effet Joule vaut :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{\infty} Ri^2\ dt = \frac{(Ba)^2}{2R} \int_0^{\infty} (v_1 - v_2)^2\ dt = \frac{(Bav_0)^2}{2R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau}\ dt$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_J = \tau\,\frac{(Bav_0)^2}{4R} = \boxed{\frac{1}{4}mv_0^2} = \mathcal{E}_i(T_1) - \mathcal{E}_f(T_1) - \mathcal{E}_f(T_2)$$

L'énergie perdue est égale à la différence d'énergie cinétique entre la fin et le début de l'expérience.

Pour aller plus loin

Ex. n°5 • Oscillateurs couplés par induction ★★☆ 8852

1) La barre 1 va se diriger vers la gauche. Le flux va diminuer, ce qui va créer un courant induit, et donc des forces de Laplace sur chaque barre. La barre 1 va être ralentie et la barre 2 va être accélérer vers la gauche, d'après la loi de Lenz. Les deux barres vont se comporter comme des oscillateurs amortis car de l'énergie sera perdu par effet Joule. Lorsque $t \to \infty$, le seul mouvement envisageable (car il se fait à flux constant) est celui où les deux barres oscillent en phase (donc deux oscillateurs harmoniques en phase).

2) On prend O_1 comme centre du repère.

Équation électrique :

$$\phi = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{S} = -Ba\,(x_1 - x_2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = 2Ri = Ba\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}$$

PFD sur chaque barre :

$$\boxed{m\ddot{x}_1 = -k\,(x_1 - \ell_0) - iaB \quad \text{et} \quad m\ddot{x}_2 = k\,(-x_2 - \ell_0) + iaB}$$

3) On combine les équations.

$$\begin{aligned}
(\text{EM1})-(\text{EM2}) &\Rightarrow m\ddot{d} = -k\,(d-2\ell_0) - 2iaB \\
\text{avec : (EE)} &\Rightarrow m\ddot{d} = -k\,(d-2\ell_0) - \frac{(aB)^2}{R}\,\dot{d} \\
&\Rightarrow \ddot{d} + \underbrace{\frac{(aB)^2}{mR}}_{=\,\omega_0/Q}\,\dot{d} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{=\,\omega_0^2}\,d = \frac{k}{m}\,\underbrace{2\ell_0}_{=\,d_{eq}} \\
&\Rightarrow \boxed{\ddot{d} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{d} + \omega_0^2\,d(t) = \omega_0^2\,d_{eq}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{EM1})+(\text{EM2}) &\Rightarrow m\ddot{s} = -ks \\
&\Rightarrow \boxed{\ddot{s} + \omega_0^2\,s(t) = 0}
\end{aligned}$$

4) On pose : $\lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega \simeq \omega_0$ (la pseudo-pulsation) puisque $Q \gg 1$.

Les CI donnent : $\ell_1(0) = \ell_0 + x_0$, $\ell_2(0) = \ell_0$ et les vitesses nulles. Il vient donc : $s(0) = x_0$, $d(0) = x_0 + 2\ell_0$ et les deux dérivées nulles en 0.

Ainsi :

$$\boxed{s(t) = x_0\,\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad d(t) \simeq (x_0+2\ell_0)\,\cos(\omega_0 t)\,\,e^{-\lambda t}}$$

Démonstration pour $d(t)$:

$$\begin{aligned}
d(t) &= e^{-\lambda t}\left[(x_0+2\ell_0)\,\cos(\omega_0 t) + (x_0+2\ell_0)\,\frac{\lambda}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right] \\
&= (x_0+2\ell_0)\,e^{-\lambda t}\left[\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2Q}\sin(\omega_0 t)\right] \\
&\simeq (x_0+2\ell_0)\,\cos(\omega_0 t)\,\,e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{s+d}{2} = \frac{1}{2}\left[x_0 + (x_0+2\ell_0)\,\,e^{-\lambda t}\right]\cos(\omega_0 t) \\
x_2(t) &= \frac{s-d}{2} = \frac{1}{2}\left[x_0 - (x_0+2\ell_0)\,\,e^{-\lambda t}\right]\cos(\omega_0 t)
\end{aligned}}$$

Ex. n°6 • Amortissement magnétique ★★☆ 6893

1) On applique le PFD sur le cadre à l'équilibre.

$$0 = -k\left(z_{eq} - \frac{a}{2} - \ell_0\right) - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_{eq} = \ell_0 + \frac{a}{2} - \frac{mg}{k}}$$

2) On oriente la spire dans le sens trigonométrique. On a donc :

$$\phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{dS} = aB_0\int_{z-a/2}^{z+a/2}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)\,dz = B_0a^2\left(1-\frac{z}{\delta}\right)$$

Ainsi,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{B_0a^2v}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Ri = \frac{B_0a^2v}{\delta}}$$

Le force de Laplace vaut :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_L = \oint i\vec{dl}\wedge\vec{B} &= -iaB_0\left(1-\frac{z-a/2}{\delta}\right)\,\vec{e}_y + iaB_0\left(1-\frac{z+a/2}{\delta}\right)\,\vec{e}_y \\
&= -\frac{ia^2B_0}{\delta}\,\vec{e}_y
\end{aligned}$$

Le PFD donne donc :

$$\boxed{m\ddot{z} = mg - k\,(z-\ell_0) - \frac{ia^2B_0}{\delta}}$$

3) On combine les deux équations :

$$m\ddot{z} = mg - k\left(z - \frac{a}{2} - \ell_0\right) - \frac{a^4B_0^2}{R\delta}\,\dot{z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{z} + \frac{a^4B_0^2}{mR\delta}\,\dot{z} + \frac{k}{m}\,z = \frac{k}{m}\,z_{eq}}$$

La force de Laplace se comporte comme une force de frottement fluide.

4) Faisons un bilan d'énergie :

$$Ri^2 = \frac{B_0a^2vi}{\delta} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k\,(\ell-\ell_0)^2\right) = -\frac{iva^2B_0}{\delta}$$

On en déduit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}k\,(z-z_{eq})^2\right) = -Ri^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -Ri^2 < 0}$$

L'énergie mécanique décroît avec le temps.

Ex. n°7 • Rampe de lancement ★★☆ 8721

1) Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et de la vitesse d'un objet massif,

$$\boxed{u_c(0^-) = u_c(0^+) = E} \quad \text{et} \quad \boxed{v(0^-) = v(0^+) = 0}$$

2) Flux :

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -Bax$$

Loi de Faraday et loi des mailles :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = Bav \quad \Rightarrow \quad \boxed{e = Ri + u_c = Bav}$$

On projette le PFD sur l'axe horizontal (seule la force de Laplace est à prendre en compte) :

$$\boxed{m\dot{v} = -iaB}$$

3) En combinant les deux équations :

$$Ri + u_c = Bav \quad \Rightarrow \quad R\,\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -Ba \cdot \frac{iaB}{m}$$

Ainsi,

$$\frac{di}{dt} + \underbrace{\left(\frac{1}{RC} + \frac{(Ba)^2}{mR}\right)}_{=1/\tau} i(t) = 0$$

De plus,

$$\frac{di}{dt} + \underbrace{\left(\frac{1}{RC} + \frac{(Ba)^2}{mR}\right)}_{=1/\tau} i(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}}$$

4) On en déduit :

$$\dot{v} = -iaB = \frac{aBE}{R}\,e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{aBE\tau}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

On en déduit la vitesse finale :

$$\boxed{v_\infty = \frac{aBE\tau}{R}}$$

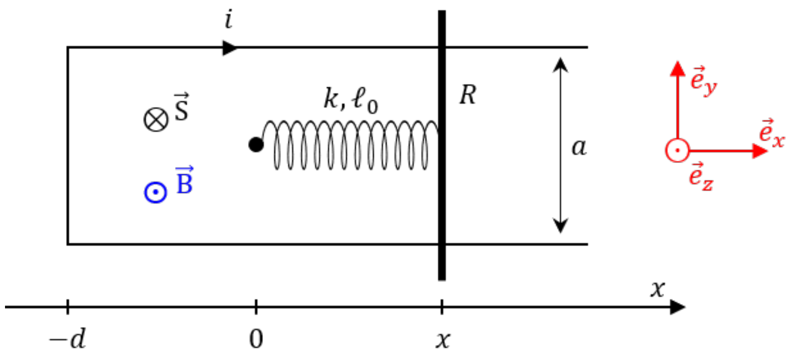
5) L'énergie dissipée par effet Joule vaut :

$$\mathcal{E}_J = \int_0^{+\infty} Ri^2\,dt = \frac{E^2}{R}\int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau}\,dt = \boxed{\frac{\tau E^2}{2R}}$$

Ex. n°8 • Rail de Laplace avec ressort ★★☆ 4360

1) Le ressort va mettre en mouvement la barre. On est donc en présence d'un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire. Les phénomènes d'induction sont dissiper l'énergie initialement stockée sous forme d'énergie potentielle élastique. La barre va finir par s'arrêter au niveau de la position d'équilibre du ressort : $\ell(t = \infty) = \ell_0$.

2) Il faut orienter le circuit.



Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\vec{B} \cdot \vec{S}\right) = \frac{d}{dt}\left(BS\right) = aB\frac{d}{dt}\left(x + d\right) = aBv$$

Avec la loi des mailles :

$$e = \boxed{Ri = aBv}$$

3) La barre est soumise à son poids et à la réaction normale du support qui se compensent, ainsi qu'à la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = i\left(-a\,\vec{u}_y\right) \wedge \vec{B} = -iaB\,\vec{u}_x = -\frac{(aB)^2}{R}\dot{x}\,\vec{u}_x$$

et la force de rappel élastique du ressort :

$$\vec{F}_{el} = -k\left(x - \ell_0\right)\vec{u}_x$$

On applique le principe fondamental de la dynamique à la barre que l'on projette selon $\overrightarrow{u_x}$.

$$m\ddot{x} = -\frac{(aB)^2}{R}\dot{x} - k\,(x-\ell_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{(aB)^2}{mR}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\ell_0}$$

On identifie :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{(aB)^2}{mR} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{R\sqrt{km}}{(aB)^2}}$$

4) On observe des oscillations, on est donc dans le régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$). On pose :

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

La forme générale est donnée par :

$$x(t) = \ell_0 + e^{-\lambda t}\Big(A\,\cos(\Omega t) + B\,\sin(\Omega t)\Big)$$

Les conditions initiales donnent :

$$x(0) = \ell_0 + A = x_0 + x_0 \quad \Rightarrow \quad A = x_0$$

et

$$\dot{x}(0) = -\lambda A + \Omega B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\lambda x_0}{\Omega}$$

On en déduit :

$$\boxed{x(t) = \ell_0 + x_0\;e^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\,\sin(\Omega t)\right)}$$

Graphe :